Условия устойчивости для систем линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \; . \end{cases} \tag{12.5}$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{12.6}$$

является квадратным уравнением и имеет два корня, которые могут быть действительными – различными или совпадающими – комплексными.

Рассмотрим всевозможные случаи.

1. $k_{1,2} \in \mathbf{R}$, $k_1 \neq k_2$, $k_1 < 0$, $k_2 < 0$.

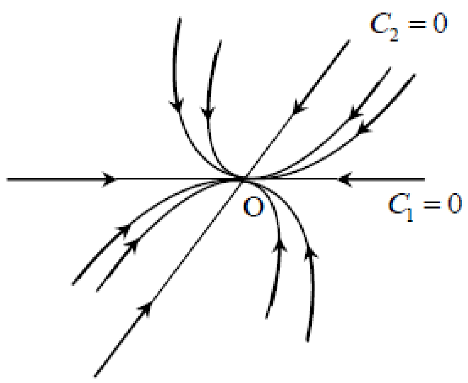


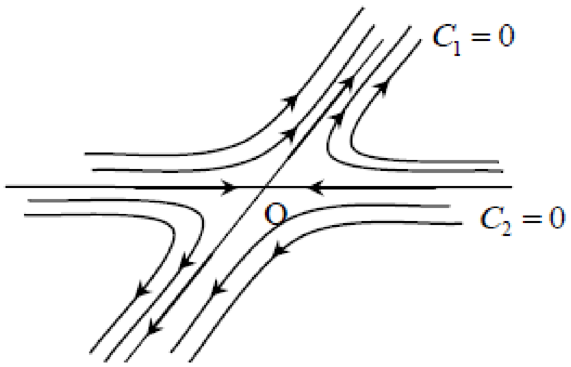
Рис. 10

Таким образом, точка покоя такого типа асимптотически устойчива в целом. Она называется *устойчивым узлом*.

2. $k_{1,2} \in \mathbf{R}$, $k_1 \neq k_2$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$.

Анализ траекторий в этом случае аналогичен предыдущему. Точка покоя неустойчива. Она называется *неустойчивым узлом* (рис. 11).

3. $k_{1,2} \in \mathbf{R}$, $k_1 \neq k_2$, $k_1 < 0$, $k_2 > 0$.



Точка покоя такого типа неустойчива, она называется *седлом.*

4. $k_{1,2} = \pm\beta i$ – корни характеристического уравнения (12.6) чисто мнимые.

Общее решение системы в этом случае имеет вид (см.гл.11):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t \\ \overline{C_1} \cos\beta t + \overline{C_2} \sin\beta t \end{pmatrix},$$

где $\overline{C_1}, \overline{C_2}$ – некоторые линейные комбинации произвольных постоянных C_1, C_2.

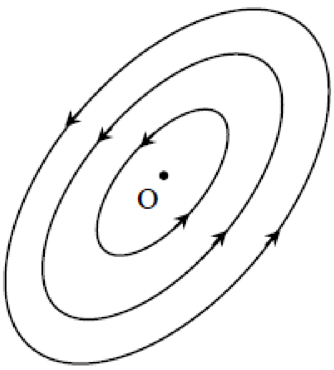


Рис. 13

В этом случае точка покоя устойчива, но не асимптотически. Она называется *центром.*

5. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \operatorname{Re} k_{1,2} = \alpha < 0$.

Решение в этом случае имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t \\ \overline{C_1} \cos\beta t + \overline{C_2} \sin\beta t \end{pmatrix}$$

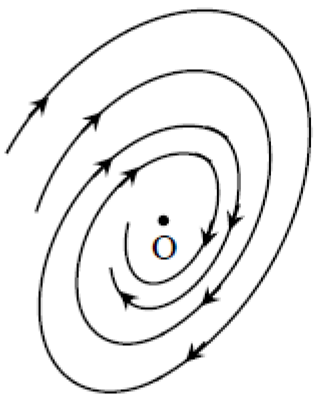


Рис. 14

Такая точка покоя асимптотически устойчива в целом и называется *устойчивым фокусом*.

6. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \operatorname{Re} k_{1,2} = \alpha > 0$.

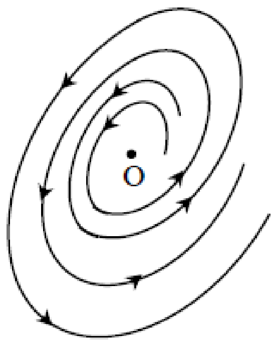


Рис. 15

Движение будет происходить также по спиралям, но в обратную сторону (рис.15). Точка покоя в этом случае называется *неустойчивым фокусом*.

7. $k_{1,2} \in \mathbf{R},\ k_1 = k_2,\ k_{1,2} < 0$.

В этом случае решение системы имеет вид (см.гл.11):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b\,t \\ c + d\,t \end{pmatrix} e^{kt},\ k = k_1 = k_2\,.$$

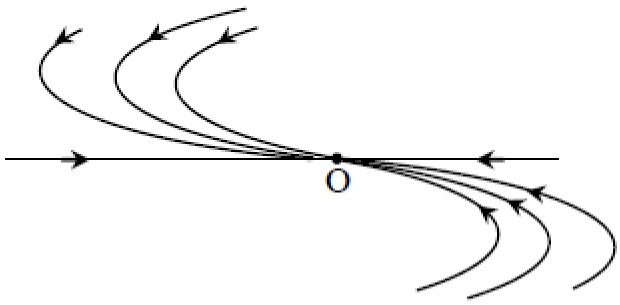


Рис. 16

Точка покоя такого типа называется *вырожденным устойчивым узлом*.

8. $k_{1,2} \in \mathbf{R}$, $k_1 = k_2$, $k_{1,2} > 0$.

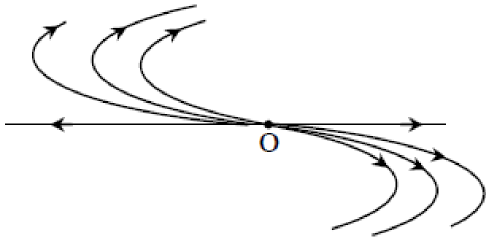


Рис. 17

В этом случае точка покоя является *неустойчивым вырожденным узлом* (рис.17).

9. $k_1 = 0$, $k_2 < 0$.

Общее решение системы имеет вид: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} e^{k_2 t}$.

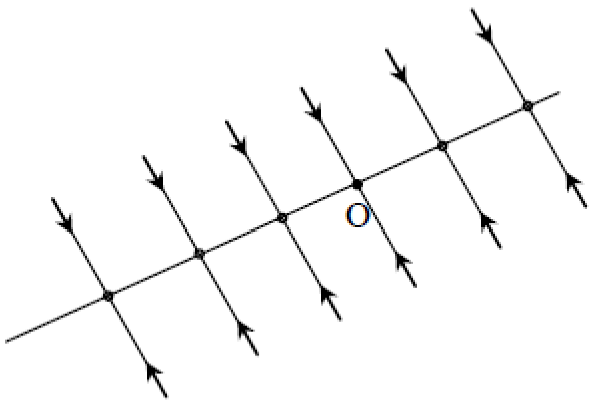


Рис. 18

В этом случае точка покоя устойчива, но не асимптотически.

10. $k_1 = 0$, $k_2 > 0$.

Точка покоя такого типа неустойчива вследствие того, что $e^{k_2 t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \infty$.

11. $k_1 = k_2 = 0$.

Общее решение имеет вид $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix}$ и точка покоя неустойчива.

Вывод. Для системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами справедливо следующее:

1. *если у всех корней характеристического уравнения (12.6)* $\operatorname{Re}k_i < 0$, *то тривиальное решение системы асимптотически устойчиво в целом, откуда следует, что все частные решение также асимптотически устойчивы в целом;*
2. *если хотя бы один корень имеет* $\operatorname{Re}k_i > 0$, *то тривиальное решение неустойчиво;*
3. *если среди корней есть простые корни с* $\operatorname{Re}k_i = 0$, *а остальные корни имеют* $\operatorname{Re}k_i < 0$, *то тривиальное решение устойчиво, но не асимптотически;*
4. *если среди корней есть кратные корни с* $\operatorname{Re}k_i = 0$, *то решение практически всегда неустойчиво;*
5. *вышесказанное справедливо не только для систем дифференциальных уравнений, но и для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* n*-го порядка.*